第４章　数学科の取り組み

Ⅰ　昨年度の研究概要

研究テーマ　「多面的な数学的思考力の育成と充実」

成果と課題

「多面的な数学的思考力とは」様々な視点から問題を考察し，有効な情報を全て引き出し，適切に活用する能力のことである。基礎学力の育成に重点を置きながらも，昨年度は「なぜそうなるのか，そのことからなにが分かるのか」という問いを生徒に主体的に考えさせることに取り組み，一定の成果を挙げた。１つの問題に対して多面的にアプローチすることで生徒の意欲や発想力を広げられるような授業展開を行うことができた。生徒から多面的に数学を思考する態度を引き出すため，比較的自由度の高い問題を提示しグループごとで自由に考えさせた。しかし，結果として様々な意見が出てきたが，生徒には問題を解決したことしか印象になかったようである。これは，問題を多面的にとらえた後に「問題を数学的に抽象化・形式化しまた問題に再帰させる」一連とした数学的サイクルを生徒が実感しにくかったのではないかと考える。問題を数学的に抽象化・形式化し解決する過程や有意性に注目させられなく結局方法論のみに生徒の注目が集まってしまったことが課題である。

Ⅱ　今年度の研究テーマ

「多面的な数学的思考力の育成」

―再帰的な数学的思考システムの構築「できる」から「わかる」へ―

１　平成 26 年度センター試験の結果から

（１）実態

平成 26 年度大学入試センター試験　設問別正答率 集約票

数学Ⅱ・数学B	受験者数			160		人													
大問	第1問																		
解答番号等	アイ	ウエ	オカ	キ	クケコ	サシス	セ	ソ	タ	チツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌネ	ノハ	ヒ	フ	ヘ
正答率	88.13	62.50	32.50	51.25	11.88	10.00	21.25	83.75	75.00	69.38	67.50	49.38	57.50	61.88	53.13	33.75	26.88	23.75	20.63
	第2問																		
	アイ	ウ	エ	オ	カキク	ケコ	サシ	ス～タ	チ～ナ	ニヌ	ネノ								
	98.13	83.75	40.63	71.25	46.88	43.13	33.75	31.25	18.13	18.13	13.13								
	第3問																		
	アイ	ウエ	オカ	キ～コ	サシス	セソタ	チツ	テ	ト	ナニ	ヌネノ								
	75.95	70.25	78.48	41.14	51.90	20.89	10.76	18.99	8.86	4.43	5.06								

上の表は本校生徒における平成 26 年度センター試験の数ⅡB　第 1 問，第 2 問，第 3 問の設問別正答率である。

（２）分析と考察

センター試験で高得点を望むには，前半の問題は確実に点をとることが大切である。しかし，第 1 問「オカ」　第 2 問「エ」　第 3 問 「キ～コ」の各設問で大幅に正答率が落ちている。設問ごとに分析をしてみる。

第 1 問「オカ」

2 点 P，Q 間の距離を求める問題である。PQ の長さを三平方の定理を用いて導出しようと試みた生徒が多いと考える。直前に点 Q の座標を求める問題があるため，それに引っ張られたのであろう。しかし，点 Q の座標は分数式になっており，多少の計算力が必要である。また平方根を外す際には，平方根に関する適切な知識が必要である。生徒はそれらの点につまずいたと考える。確かに，計算力は問われるが，問題文中で計算しやすいよう誘導がついており，計算を工夫できればそれほど大変な計算ではない。

また，問を別の視点で見てみると，点と直線の距離の公式で PQ の長さが導出できることにも気付くはずである。点と直線の距離の公式を用いれば，計算量も格段に落ち，容易に解が得られる。日々の指導の中で，多面的な思考力を十分に養えていないと考える。問題をオートマティックに解ける方法に生徒が偏りがちで，数学的な思考力を養えていない。

第 2 問「エ」

三次関数が極値を持つ条件を求める問題である。 $f'(a)=0$ を満たせば，$x=a$ で極値を持つと端的に考えている生徒が多いと考えられる。内容理解が十分でないことが原因である。上記のことは教科書にも記載されており，十分に注意が必要な点である。

第 3 問 「キ～コ」

階差数列を用いて{an}の一般項を求める問題である。階差数列は等差数列になっており，一般項も非常に容易に求めることができる。階差数列の一般項は 78％以上の生徒が正答しているのに対し本問題は正答率 41％と格段に落ちている。階差数列が理解できていない。もしくは，Σ計算が定着できていないことが考えられる。

２　研究の基本的な考え方

（１）生徒に身に付けさせたい力

大学入試に照準を向け，単に競争的入学試験に合格できる資質と能力を育成するのではなく，諸問題に対して多面的に数学を用いてアプローチする姿勢を身に付けさせたい。前年に引き続き「多面的に問題を数学的に思考する姿勢」の育成は継続しつつ，一連の数学的思考システムの構築を目指したい。すなわち，問題を様々な角度から数学的に抽象化・形式化し，再び現実世界へとフィードバックさせる再帰的な数学的思考システム

を生徒に身に付けさせたい。そのような思考過程をへて初めて生徒は「できる」から「わかる」への脱却ができると考える。

（２）力を身に付けさせるための手立て

問題解決を生徒主導で行う。これは，主体的に問題を解決することで，数学的活動の中で「考察」→「解決」→「理解」のサイクルを観察・分析しやすくするねらいがある。

「考察」の段階で様々な角度から問題を考えるよう促して生徒が多面的にアプローチできるようにし，問題を数学的に抽象化・形式化させ問題解決を図る。

Ⅲ 数学科学習指導案

１　日時・場所　11 月 7 日（金）５限　本館４階１－3H 教室

２　学　年・組　１年 3H（普通科）40 名

３　教　　材　教科書「数学Ａ」数研出版

４　単　元　名　数学Ａ「場合の数と確率」（事象と確率）

５　単元について

（１）単元観

さいころ，トランプなどの偶然に支配されるゲームの勝敗を検討することに起源があるこの分野は，他の数学の分野に比べ，生徒が親しみを持って取り組みやすい分野であると思われる。しかし，簡単な計算と裏腹に，多くの生徒が苦手とする分野でもある。このことから，形式的な「理解」では確率概念の確立が難しいことが考えられる。以上より，他の分野に増してより一層数学的活動を重視する必要があると考える。数学的活動を通して，問題を数学的に抽象化・形式化し，再び問題へとフィードバックさせる再帰的な思考を経由して生徒の確率概念の形成を試みたい。単に公式を覚え形式的に問題に臨むのではなく，これまでに学習した集合やこの単元で新たに学んだ順列・組合せの総数などを用いて様々な角度から考察していく。本単元で，事象を多方な角度から，数学的に考察する能力や態度を養う。

（２）生徒観

先日の夏季課題試験では，平均点 56.3 点と学年平均点 58.2 点を僅かに下回っている。1 学期に実施された毎週１回の小テストでは, 平均点 7.5 点と学年平均 7.1 点を上回っているが, 2 学期に実施された小テストの結果は，平均点 7.0 点と学年平均 7.2 点を下回っている。これは，学習意欲が若干低下しているとも見ることもできるが，新しく三角比の分野に入り，新たな概念に対しての理解が円滑に進んでいないとも考えられる。中学校で，樹形図等を用いて，事象を全て数え上げる統計的確率を学んでいるが，複雑な場合分けを用いる事象に関しては学習をしていない。

クラス全体としては，前向きに授業に参加する姿勢が見て取れ，生徒が考え方・意見を発表する場面も多く見て取れる。また，こちらがグループ学習を促さなくても席の近いもの同士で自由に相談する場面も見られる。

（３）指導観

生徒同士で協力して，様々な角度から問題解決を図る姿勢を育みたい。また，形式的な計算方法に偏重するのではなく，事象の具体例を書き出す作業などを通じ，1 問 1 問じっくり考えさせたい。

中学校で学んだ統計的確率と高校で学ぶ確率との違いに十分に注意をする必要がある。最初は比較的に取り組みやすい問題に重点的に取り組み，中学校で学んだ確率との違いを実感させながら，確率概念の形成を図りたい。時に，問題を数学的に抽象化・形式化するヒントを提示するが，授業の展開は主体的に発言する生徒に主導させ，グループ活動などを通じて言語活動の充実を図ることでクラス全員に内容の理解と定着を図る。

６　単元の目標

「場合の数」で学習した順列や組合せを用いて様々な事象の確率を求めることができ，それを具体的な場面に活用できるようにする。実生活において事象を数学的に考察し，数学的な見方や考え方のよさを認識できるようにする。

７　単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
確率の考え方に関心を持つとともに，確率を通して事象を考察することの有用性を認識し，それらを活用しようとする。	確率における数学的な見方や考え方を身に付け，事象を数学的にとらえ，論理的に考える。	様々な事象の確率を数学的に考察し，表現し処理する仕方や推論の方法を身に付け，よりよく問題を解決する。	確率の基本的な概念，原理・法則，用語・記号，基本性質などを理解し，基礎的な知識を身に付けている。

８　指導と評価の計画（全 19 時間）

次	学習内容	時数	評価					
			関	考	技	知	評価規準	評価方法
1	事象と確率 （本時は４時間目）	4	○	○			○問題に関心を持ち，すでに学習した場合の数の基本知識を活用し事象の確率を求めようとする。（関） ○事象を数学的にとらえ，既に学習した基本知識を活用し，論理的に考えることができる。（考）	机間指導や発表による行動観察，ワークシート，ノート
2	確率の基本性質	5		○	○	○	○具体的な事象を数学的にとらえ，論理的に考えることができる。 ○具体的な事象における確率を確率の基本性質を利用して求めることができる。（技） ○和事象，積事象，排反事象や確率の基本性質を理解する。（知）	
3	独立な試行の確率	3	○	○			○独立な試行について関心を持ち，具体的な事象の考察に活用しようとする。(関) ○具体的な場面における確率を独立な試行の確率の性質を用いて考察することができる。(考)	
4	反復試行の確率	4	○	○		○	○反復思考の確率に興味を持ち，事象の考察に活用しようとする。(関) ○具体的な場面における確率を反復試行の確率を用いて考察することができる。(考) ○反復試行の確率の意味や計算方法について理解し，基礎的な知識を身に付けている。(知)	

5	条件付き確率	3	○	○			○条件付き確率に興味を持ち，事象の考察に活用しようとする。（関） ○複雑な事象の確率を条件付き確率を用いて考察することができる。（考）	

9　本時の展開

（１）本時の目標

組合せ・重複順列の考え方などを利用し，工夫して確率を求められるようになる。

（２）本時の評価規準

・問題に関心を持ち，既に学習した「場合の数」などの基本知識を活用し，根元事象の数を考えようとする。（関心・意欲・態度）

・事象を数学的にとらえ，既に学習した基本知識を活用し，論理的に考えることがでる。（数学的な見方や考え方）

（３）準備物　ワークシート

（４）本時の指導過程

学習内容	○指導過程・●学習活動	指導上の留意点	評価規準《方法》
導入 (5 分)	○本時の目標を提示する 問 1　四個の数字 1，　2，　3，　4 の数字を重複を許して使ってできる 4 桁の整数全てがそれぞれ印字されたカードがある。このカードの中から 1 枚を引き，それに書かれた数の四つの数字に応じて，得点を次のように定める。 ・四つとも同じ数字のとき　9 点 ・2 回現れる数字が二つあるとき　3 点 ・3 回現れる数字が一つと，1 回だけ現れる数字が一つあるとき　2 点 ・2 回現れる数字が 1 つと，1 回だけ現れる数字が二つあるとき　1 点 ・数字の重複がないとき　0 点 このとき何点もらえる確率が最も高いか考えよう。		

	○ 問題の難易度が高いため，この問題をより簡単にした問題（展開1）を提示し，それを考えさせる。	・ゲームのルールが理解しやすいよう，実際にカードを引いて見せ得点を得るまでの過程を実演してみせる。	
展開 1 (25 分)	問 2 三個の数字 1， 2， 3 の数字を重複を許して使ってできる 3 桁の整数全てがそれぞれ印字されたカードがある。このカードの中から 1 枚を引き，それに書かれた数の三つの数字に応じて，商品を次のように定める。 ・三つとも同じ数字のとき　3 点 ・二つ同じ数字があるとき　2 点 ・数字の重複がないとき　1 点 このとき何点もらえる確率が最も高いか考えよう。		
	○数字が四個から三個に減ったため考えやすいことを伝える。生徒それぞれに予想させるが，その際の注意として，ワークシートに考えをしっかり記述することを促す。 ○ 4 人規模のグループを作り考えさせる。 ○ 生徒に自由に考えさせる。 《予想される生徒の反応》 （ⅰ）具体的な例を書き下し，根元事象を数えあげる （この反応が最も多いと予想） （ⅱ）○，●などの記号を用い，並べ，根元事象を数え上げる。 （ⅲ）○，●などの記号を用い，組合せ・重複順列の考え方を用い，根元事象を計算する。	・答えが出た生徒には，もっと別の考え方はないか考えさせる。 ・色々な角度から問題を考察できるよう自由に相談させる. ・いくつかの考え方を発表させる。 ・（ⅰ）の考え方しかアイディアが出ない場合，書き下した根元事象を用いて，別の考え方ができないか促す。 ・{112}，{121}， {211}の場合は組合せで考えたら同じものであることを指摘する。	《机間指導や発表による行動観察》

	○ 「二つ同じ数字があるとき」の場合の数が，3 桁の数字を ○○●で抽象化でき，「（○○●）の並べ方」と「○，●の各数字の選び方」の積で求められることを確認する。	・{113}，{131}，{311}の場合は{112}，{121}，{211}の場合と同様に考えられることを指摘する。	
展開 2 (15 分)	○ 再度問 1 についてグループで考えさせる。 ○ 解けている生徒に解答を板書させる。	・問題の本質としては問 2 と変わらないこと伝える。 ・先ほどの考え方を用いて考えるよう指示する。 ・前問と同様に自由に考えさせる。	《机間指導や発表による行動観察》
展開 3 (5 分)	○ 本時のまとめ ● ワークシートに本時のまとめをさせる。 ○宿題を提示する。	・問 1 は問 2 と同様に考えられること。組合せ・同じものを含む順列の考え方を用いることによって，数え上げ（計算）が楽になることをまとめる。	

Ⅳ 研究授業後の取り組み

１　研究協議について

研究従業を終えて，協議された内容の一部を次に示す。

授業者より 指導の工夫等	昨年多面的な数学的思考力の育成のための実践をしていったが，成果が表れなかった。そこで，今回は具体的事象から始め，問題を抽象化し，これらを実際の問題に使うという思考力が必要なのではないかと思い，今回はこの問題を扱った。
協議・助言等の内容	単元観にある「数学的活動を通して，問題を数学的に抽象化・形式化し，再び門題へとフィードバックさせる再帰的な思考を経由して生徒の確率概念の形成を試みたい。」についての議論となった。出た意見は (1) 問１がかなりできているのに問２に移っていたがこれは意味があったのか。ねらいや意図がつかめないのでは。 (2)リアリティのある技術で示せていたからテーマには合っていた。生徒が解く→抽象的な方法で提示→それを使って考える。などはできていた。 (3)９点，０点，２点のあと問２をしないで３点をやってもよかったのではないだろうか。問２が抽象化，形式化に役立っていないのではないか。 (4)問題を数学的に抽象化させることと，具体化させることはどういうことなのか。
今後の課題	・生徒に考えさせる教材を定期的に投げ入れる必要がある。 ・研究授業では最低限やらないといけないことは他をカットしてでもやるほうがよい。

２　授業観察について

１　目標（生徒に身に付けさせたい力）が明確か。 ・数学的思考力の育成についてよく考えられていた指導計画であったように思う。 ・もう少し具体的な目標設定にし，1時間の成長の評価ができるようにすることも必要ではないか。
２　生徒の思考や活動を促す適切な発問・指示・アドバイスがあるか。 ・指導するに当たって言語活動を充実するためには，数学の授業における言語活動を明確にする必要があると感じる。 ・生徒の目線に立った言語活動が行われていたように思う。授業序盤の発問では，スモールステップを踏み丁寧に答えを引き出していったが，もっとオープンな質問から，答えを予想させながら自由な発想を引き出すこともできたと思う。
３　本時の授業を研究主題に照らしたときの課題 ・数学的活動を取り入れる際には，指導の手段と効果，予想される生徒の反応，評価基準に満たない生徒への手立てを考えておく必要がある。 ・常に生徒の気持ちを考えながら授業展開を行うようにすることが大切である。 問題に対するアプローチの仕方という，解法の技術指導という面では研究主題に合っていると感じた。その上で応用力を養うために自発的な思考を促す工夫を入れると良いが，その場合研究主題からは少しズレが生じることが予想される。双方のバランスが課題である。
４　改善に向けての自由意見 ・言語活動を充実させるためには，言語活動が何かを指導者が明確にしておくとともに，取り入れることで得られる効果を指導前と指導後に検証し，次時に活かす指導のサイクルを構築する必要があると考える。 ・生徒に解法のよさを印象付けるためにも，自由な予想からちょっとした驚きを与えてあげるような工夫ができると良いのではないだろうか。

Ⅴ　今年度の研究を終えて

今年度の研究では，問題を様々な角度から数学的に抽象化・形式化し，再び現実世界へとフィードバックさせる再帰的な数学的思考システムを確立することにより，生徒が競争的入学試験に合格できる資質と能力を獲得できると考えた。研究授業では多面的なアプローチを考えることができる問題を生徒に提示した。これは生徒に主体的に問題に取り組んでもらうためでもある。様々なアプローチが考えられるため，仮に生徒が満足するような解を活動の中で得られたとしても，さらに良い解法を生徒が主体的に考えようとする態度も育むことが出来る。今回の授業では 4，5 人でのグループワークを採用した。グループの中でもいくつかの解法が出て意見が活発に交わされる場面も確認できた。

研究授業では目標達成のための手立てが不十分であったという意見が見られた。生徒が問題解決のための抽象化の手立て・解法を指導者が意識しすぎて，逆に生徒の自由な発想を妨げてしまった様子は否めない。生徒の意見を上手く授業者が引き出せない・活かせない場面も見られた。目標を達成するための数学的活動・言語活動を授業者が事前にもっとよく練り生徒らに提示する必要があった。

次に示すのは二学期期末考査数学 α の 問 10・12 のクラス別平均点（図 1）である。

	問 10		問 12	
	(1)	(2)	(1)	(2)
3H 平均（授業クラス）	2.9	2.0	2.2	3.4
4H 平均	2.9	1.3	2.1	2.5
5H 平均	2.6	1.6	2.3	2.8
6H 平均	2.9	2.0	2.5	4.1
7H 平均	2.4	0.8	2.1	2.7
8H 平均	2.7	1.7	2.6	2.8

図１　二学期期末考査数学 α の 問 10・12 のクラス別平均点

問 10・12 の両問題は実際の入試問題を意識して作られた問題である。両方とも場合の数・確率の問題である。問 10 では問題に記されたゲームのルールを正確に理解し，問題に取り組む必要がある。単純なさいころのゲームであるが，このようなゲームのルールの問題を解いたことのある生徒はあまりいないと予想する。ほとんどの生徒は自ら具体例を挙げ，形式化し，問題に取り組んだと考えられる。 問 12 は袋の中から 3 つの色違いの玉を取り出す問題である。このゲームは，教科書でも扱われるような基本的なものである。(1) は基本的な問題であるが(2)の内容は発展的である。(2) はいくつかの場合分けが必要

であり，短絡的な思考では正しい解を得ることが出来ない。(2) のような問題を解いた経験のある生徒は多くないと考えられる。

その中で研究授業を実施した 1－3H の生徒の設問別平均点を他のクラスと比較してみる。上述した問 10・12 において 3 H の各設問での平均点は 2.9 点，2.0 点，2.2 点，3.4 点となっている。特に問 10(2)，問 12(2) では他のクラスの平均より高い得点をあげている。この場合で考えられるのは，研究授業で生徒らに提示したような問題（多面的なアプローチが可能であるような問題）に生徒らはじっくり考え課題を解決しようとしていた姿勢が身に付いており，今回の結果につながったのではないかと考える。つまり，今まで見たことがないような問題に対しても諦めることなく，自ら工夫し，様々な角度から問題解決に励んだのではないかと推測する。

以上のことより，こうした研究授業は生徒にじっくり考えさせるという点では成果が挙げられたと考えられる。しかし，今回の研究テーマである「多面的な数学的思考力」や「問題の抽象化・形式化」が生徒に十分に身に付いたと判断することは難しい。

また，授業の観察者の意見の通り目標を達成するための手立ての工夫など，改善すべき点は多々あり，引き続き考えていかなくてはならないだろう。

より実践的でかつ多面的なアプローチを試みることが出来る問題は引き続き検討し，実施するべきだと考える。さらに，今後は，目標を達成する手立てについても研究を深める必要性がある。